

16

Hydraulics

3rd Year civil

First Term (2009 - 2010)

Chapter ()

2009 - 2010

Dimensional Analysis التحليل البعدي

هذه طريقة تستخدم للربط بين المتغيرات المختلفة التي تتحكم في ظاهرة معينة .

مميزات التحليل البعدي :

- ١- تقليل عدد المتغيرات المدروسة بربط بعضها ببعض .
- ٢- توضح تصور مبدئي للعلاقات بين المتغيرات .
- ٣- تسهيل الحل العملي .
- ٤- إعطاء حلول ومعادلات تقريبية صحيحة .

عيوب التحليل البعدي :

- ١- اختيار متغيرات غير صحيحة يؤثر بعمق كبير على التخطيط العملي .
- ٢- توضح العلاقات بين المتغيرات دون أن تدر نوع هذه العلاقة .

Methods of dimension analysis :

- 1 - Buckingham method (π -method)
- 2 - Rayleigh's method.
- 3 - Matrix method.
- 4 - simple method.
- 5 - By visual inspection.
- 6 - Rearrangement of variables.

Types of equations : أنواع المعادلات

Homogenous equation:

هذه المعادلات التي يكون فيها أبعاد الطرف الأيمن
هذه نفسها أبعاد الطرف الأيسر من المعادلة.

$$Q = A \times V$$

$$L^3 \cdot T^{-1} = L^2 \times L \cdot T^{-1}$$

$$L^3 \cdot T^{-1} = L^3 \cdot T^{-1}$$

non-homogeneous equation:

هذه المعادلات التي تكون فيها ابعاد الطرف اليمين مختلفة عن ابعاد الطرف اليسار .

$$* Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \cdot S^{1/2}$$

$$L^3 \cdot T^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(L^2)^{5/3}}{(L)^{2/3}} \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^{1/2}$$

$$L^3 \cdot T^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{L^{10/3}}{L^{2/3}}$$

$$L^3 \cdot T^{-1} = \frac{1}{n} \cdot L^{8/3}$$

$$* V = C \sqrt{R \cdot S}$$

$$L \cdot T^{-1} = C \sqrt{\frac{A}{\rho} \times S}$$

$$= C \sqrt{\frac{L^2}{L} \times \frac{L}{L}}$$

$$L \cdot T^{-1} = C \times L^{1/2}$$

Types of Variables:

أنواع المتغيرات

(1) Geometric Variables

متغيرات هندية

وهي المتغيرات التي تعتمد على البعد (L) فقط مثل

الزحلول = L ، المساحات = L²الحجوم = L³ ، هكذا(2) Kinematic Variables

وهي المتغيرات التي تعتمد على البعدين (L, T) مثل

السرعة = L.T⁻¹ ، العجلة = L.T⁻²(3) Dynamic Variables:

وهي المتغيرات التي تعتمد على الأبعاد (F, L, T) مثل

الضغط = F.L⁻² ، القوة = Fالتوتر السطحي = F.L⁻¹ ، اللزوجة = F.T².L⁻⁴

Dimensions of Common properties

Term	Symbol	Dimension	
		M.L.T	F.L.T
Geometric property			
- Length	L	L	L
- Area	A	L ²	L ²
- Volume	V	L ³	L ³
Kinematic property			
- Time	t	T	T
- Velocity	v	L.T ⁻¹	L.T ⁻¹
- acceleration	a, g	L.T ⁻²	L.T ⁻²
- angular velocity	ω	T ⁻¹	T ⁻¹
- " acc.	α	T ⁻²	T ⁻²
- Kinematic viscosity	ν	L ² .T ⁻¹	L ² .T ⁻¹
- Discharge	Q	L ³ .T ⁻¹	L ³ .T ⁻¹
Dynamic property			
- Mass	m	M	F.T ² .L ⁻¹
- Force	F	M.L.T ⁻²	F
- Density	ρ	M.L ⁻³	F.T ² .L ⁻⁴
- specific weight	γ	M.L ⁻² .T ⁻²	F.L ⁻³
- surface tension	σ	M.T ⁻²	F.L ⁻¹
- pressure	P	M.L ⁻¹ .T ⁻²	F.L ⁻²
- Momentum	M	M.L.T ⁻¹	F.T
- Dynamic viscosity	μ _{dyn}	M.L ⁻¹ .T ⁻¹	F.T.L ⁻²

Buckingham Method (π -method)

- Find the inter relations between the following Variables

$$\Delta P = f(L, V, D, \mu, \rho, K)$$

where :

ΔP : difference in pressure

L : Length of pipe .

V : velocity through pipe .

D : diameter of pipe .

μ : dynamic viscosity .

ρ : density of liquid .

K : Roughness height

خطوات الحل :

١- نحدد المتغيرات الموجودة في طرفي المعادلة

$$\text{No. of Variables} = 7$$

٢- نكتب ابعاد المتغيرات الموجودة بالمعادلة بأحد

الأنظمة المعروفة (M.L.T) ، (F.L.T)

$$(F.L^{-2}) = f(\underbrace{L}_{\downarrow}, \underbrace{L.T^{-1}}_{\downarrow}, \underbrace{L}_{\downarrow}, \underbrace{F.T.L^{-2}}_{\downarrow}, \underbrace{F.L^{-4}.T^2}_{\downarrow}, \underbrace{L}_{\downarrow})$$

٣- نحدد الابعاد المتكررة بالمعادلة

$$\text{No. of repeated dimensions} = 3$$

$$\text{No. of " Variables}$$

٤- نحدد عدد العلاقات بين المتغيرات التي

سوف يتم استنتاجها

$$\text{No. of } \pi = \text{No. of variables} - \text{repeated dimensions}$$

$$= 7 - 3 = 4$$

٥ - لتكوين العلاقات بين المتغيرات يتم اختيار
 عدد من المتغيرات أساسية (repeated dimension)
 بحيث يكون أحدها من نوعه (geometric)
 و أحدها من نوعه (kinematic) و أحدها من نوعه
 (dynamic).

بفرض أنه الاختيار ρ, ν, D

٦ - نبدأ بتكوين العلاقات كالآتي

$$\pi_1 = \rho^a \cdot \nu^b \cdot D^c \cdot \Delta P$$

$$\pi_2 = \rho^a \cdot \nu^b \cdot D^c \cdot L$$

$$\pi_3 = \rho^a \cdot \nu^b \cdot D^c \cdot \mu$$

$$\pi_4 = \rho^a \cdot \nu^b \cdot D^c \cdot K$$

٧- لإيجاد قيم الأسس $a < b < c$ يتم حل المعادلات كالآتي مع الأخذ في الاعتبار أن المعادلة متجانسة (homogenous equation)

$$F^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (F \cdot L^{-4} \cdot T^2)^a \cdot (L \cdot T^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot (F \cdot L^{-2})$$

ويتم مساواة الأسس لبقا تلك في طرفي المعادلة

$$\underline{F:} \quad 0 = a + 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\underline{T:} \quad 0 = +2a - b \Rightarrow a = -2 - b$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\underline{L:} \quad 0 = -4a + b + c + 1$$

$$0 = 4 - 2 + c - 2 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} \times V^{-2} \times D^0 \times \Delta P$$

$$\boxed{\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho \cdot V^2}}$$

وبتكرار الخطوه السابقه نحصل على باقي العلاقات

$$\pi_2 = \rho^a \cdot V^b \cdot D^c \cdot L$$

$$F^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (F \cdot L^{-4} \cdot T^2)^a \cdot (L \cdot T^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot (L)$$

$$\underline{F:} \quad 0 = a \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

$$\underline{T:} \quad 0 = 2a - b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$\underline{L:} \quad 0 = -4a + b + c + 1 \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\pi_2 = \rho^0 \cdot V^0 \cdot D^{-1} \cdot L$$

$$\boxed{\pi_2 = \frac{L}{D}}$$

$$\pi_3 = \rho^a \cdot V^b \cdot D^c \cdot \mu$$

$$F^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (F \cdot L^{-4} \cdot T^2)^a \cdot (L \cdot T^{-1})^b \cdot (L)^c \cdot (F \cdot L^{-2} \cdot T)$$

$$\underline{F:} \quad 0 = a + 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\underline{T:} \quad 0 = 2a - b + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -1}$$

$$\underline{L:} \quad 0 = -4a + b + C - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = -1}$$

$$\pi_3 = \rho^{-1} \cdot V^{-1} \cdot D^{-1} \cdot \mu$$

$$\boxed{\pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}}$$

عند وجود متغيرات لها نفس الابعاد ننتج
 لها نفس (π) مثل $L < D < k$
 لهم نفس الابعاد وبالتالي نجد أن π_4
 المتعلقة ب (k)

$$\pi_4 = \rho^a \cdot V^b \cdot D^c \cdot k$$

سيؤدي حلها إلى $a=0$ ، $b=0$ ، $c=-1$

مثل (L) وبالتالي نجد أن

$$\pi_4 = \rho^0 \cdot V^0 \cdot D^{-1} \cdot k$$

$$\boxed{\pi_4 = \frac{k}{D}}$$

١ - تجميع المتغيرات في صورة نظائرية

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho \cdot V^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}, \frac{k}{D}\right)}$$

$$\therefore \boxed{\Delta P = \rho \cdot V^2 * f\left(\frac{L}{D}, \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}, \frac{k}{D}\right)}$$

Ex. (1) $\tau = \rho \cdot V^2 * f\left(\frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}\right)$

Ex (2) $R_n = \frac{V \cdot y}{\nu}$